圧密方程式の解法

2階線形偏微分方程式 $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+F=0$

解の1次結合も解

偏微分方程式

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial T_v}=\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}} \quad (1.19)$$

$B^2-4AC<0$ ⇨ 楕円型(ellipse)

$F=0$ ⇨ 同次(homogeneous)

境界条件

$at \quad \zeta=0, \quad u(0,T_v)=0$ (1.20')

$at \quad \zeta=1, \quad \frac{\partial u(1,T_v)}{\partial \zeta}=0$ (1.20'')

初期条件

$at \quad T_v=0, \quad u(\zeta,0)=\Delta\sigma_{z0}=const.$ (1.21)

無次元化距離、 時間

$$\zeta=\frac{z}{H}, \qquad T_v=\frac{c_v t}{H^2} \qquad (1.18)$$

$0 \le \xi \le 1$ 有限領域

⇩

変数分離法
Method of
Separation of Variables
+
Fourier series

変数分離法:

ζのみの関数、T_vのみの関数

$$u(\zeta,T_v)=F(\zeta)\cdot\Phi(T_v) \qquad (*1)$$

$\frac{\partial u}{\partial T_v}=\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$ (1.19)

(1.19) => $F(\zeta)\frac{\partial \Phi(T_v)}{\partial T_v}=\Phi(T_v)\frac{\partial^2 F(\zeta)}{\partial \zeta^2}$ (*2)

⇩

変数分離 $\underbrace{\frac{1}{\Phi(T_v)}\frac{\partial \Phi(T_v)}{\partial T_v}}_{T_v\text{のみの関数}}=\underbrace{\frac{1}{F(\zeta)}\frac{\partial^2 F(\zeta)}{\partial \zeta^2}}_{\zeta\text{のみの関数}}=const=-\lambda^2$ (*3)

常に負になる(ゼロか正では解は物理的意味を持たない)

T_vのみの関数 ζのみの関数

⇩

2つの常微分方程式
$$\begin{cases} \frac{d\Phi(T_v)}{dT_v}+\lambda^2\Phi(T_v)=0 \\ \frac{d^2F(\zeta)}{d\zeta^2}+\lambda^2F(\zeta)=0 \end{cases} \quad (*4)$$

一般解 ⇨
$$\begin{cases} \Phi(T_v)=C_1e^{-\lambda^2 T_v} \\ F(\zeta)=C_2\sin(\lambda\zeta)+C_3\cos(\lambda\zeta) \end{cases} \quad (*5)$$

$T_v=\infty \rightarrow \Phi(T_v)=0$

(*1)

$$u(\zeta,T_v)=e^{-\lambda^2 T_v}\{A_1\sin(\lambda\zeta)+A_2\cos(\lambda\zeta)\} \qquad (*6)$$

B.C.(1.20')&(1.20'')

排水境界条件
(1.20') $u(0,T_v)=0$ ⇨ $u(0,T_v)=e^{-\lambda^2 T_v}A_2=0, \qquad \therefore A_2=0$ (*7)

$$\frac{\partial u(\zeta,T_v)}{\partial \zeta}=e^{-\lambda^2 T_v}\{A_1\lambda\cos(\lambda\zeta)+\overset{0}{\cancel{A_2}}\lambda\sin(\lambda\zeta)\}$$

非排水
境界条件
(1.20'') $\frac{\partial u(1,T_v)}{\partial \zeta}=0$ ⇨ $\frac{\partial u(1,T_v)}{\partial \zeta}=e^{-\lambda^2 T_v}\{A_1\lambda\cos(\lambda)\}=0$

=> $A_1\lambda\cos\lambda=0, \quad A_1\neq 0$ <=[$A_1=A_2=0$では、uは常に0、物理的意味なし]

=> $\cos\lambda=0$

ここまで
$A_2=0$,
A_1?

固有値 $\therefore \lambda=\frac{2n+1}{2}\pi$ (*8)

あるnに対する定数A_{1n}では、(*6)は周期関数となり、初期条件(1.21)を満足できない。

<u>無限個のn、λ_nについて解の一次結合も解</u>で、初期条件を満足する可能性あり。

線型偏微分方程式

A_1=>A

(*6) => $u(\zeta,T_v)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\exp\left\{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2T_v\right\}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\zeta\right)$ (*9)

⇧

I.C. (1.21) $u(\zeta,0)=\Delta\sigma_{z0}=const.$

$$u(\zeta,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\zeta\right)=\Delta\sigma_{z0}=const \qquad (*10)$$

両辺に $\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\zeta\right)$ $(m=0,1,2,\cdots\infty)$ を掛け0→1まで積分

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_0^1\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\zeta\right)\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\zeta\right)d\zeta=\Delta\sigma_{z0}\int_0^1\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\zeta\right)d\zeta \qquad (*11)$$

$$\int_0^1\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx=-\int_0^1\frac{1}{2}[\cos\{(m+n)\pi x\}-\cos\{(m-n)\pi x\}]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\pi x}{(m+n)\pi}-\frac{\sin(m-n)\pi x}{(m-n)\pi}\right]_0^1=\begin{matrix}(m\neq n):0 \\ (m=n):-\frac{1}{2}\int_0^1(\cos 2n\pi-1)dx=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

直交関数:orthogonal function

$$\frac{1}{2}A_m=-\Delta\sigma_{z0}\left[\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\zeta\right)}{\frac{2m+1}{2}\pi}\right]_0^1=\Delta\sigma_{z0}\frac{1}{\frac{2m+1}{2}\pi}$$

m => n

⇨ $A_n=\frac{2}{a_n}\Delta\sigma_{z0}, \quad \left(a_n=\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ (*12)

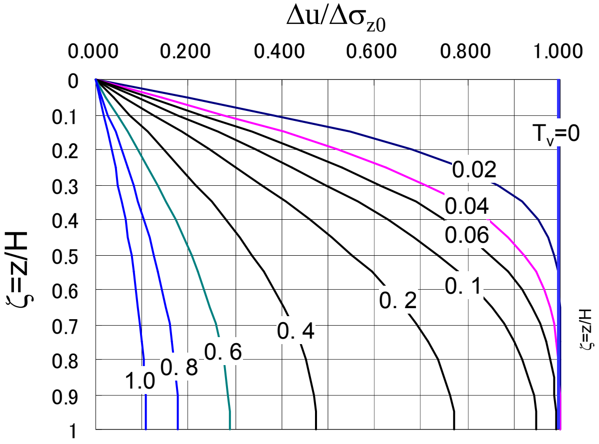
(*12)=>(*9) $u(\zeta,T_v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\Delta\sigma_{z0}}{a_n}\exp\left(-a_n^2T_v\right)\sin(a_n\zeta), \quad \left(a_n=\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ (1.22)

B.C.(1.20)、I.C.(1.21)における圧密方程式(1.19)の解

圧密方程式の解

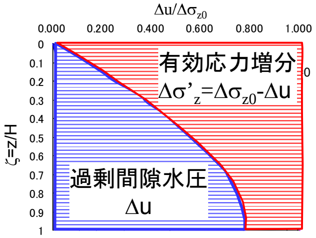
ある時間における過剰間隙水圧の分布　=>　等時線
(isochrone)

注意：このΔuは(1.22)式のuと同じ



有効応力増分

$$\Delta\sigma'_z(\zeta, T_v) = \Delta\sigma_{z0} - \Delta u(\zeta, T_v) \quad (1.23)$$



1.4　圧密変形(沈下)、圧密度

$$\Delta\varepsilon_z = m_v \Delta\sigma'_z \quad (1.2')$$

$$\Delta\varepsilon_z = m_v \Delta p \quad (1.2)$$

Δp:圧密圧力増分
(Δσzと同じ)

(1.23) →

$$\Delta\varepsilon_z = m_v(\Delta\sigma_{z0} - \Delta u) \quad (1.2'')$$

圧密沈下量ΔS＝変形量：鉛直ひずみを圧縮層厚さh間で積分

$$\Delta S = \int_0^h \Delta\varepsilon_z dz = h\int_0^1 m_v(\Delta\sigma_{z0} - \Delta u)d\zeta$$

$$= m_v\left[\Delta\sigma_{z0}h - h\int_0^1 \Delta u d\zeta\right]$$

$$= m_v \Delta\sigma_{z0} h\left[1 - \frac{1}{\Delta\sigma_{z0}}\int_0^1 \Delta u d\zeta\right]$$

Δu_m:過剰間隙水圧の平均値

$\Delta u_{t=0}$:初期過剰間隙水圧

$$\Delta S = m_v \Delta\sigma_{z0} h\left[1 - \frac{\Delta u_m}{\Delta u_{t=0}}\right] \quad (1.24)$$

$$\Delta S \begin{cases} = 0, \quad t = 0 \\ (\because \Delta u = \Delta\sigma_{z0}) \\ = m_v \Delta\sigma_{z0} h, \quad t = \infty \\ (\because \Delta u = 0) \end{cases} \quad (1.25)$$

沈下量：土層全域の全応力増分に対する有効応力増分の割合に比例　***条件??***

$(\Delta\sigma_{z0}h)$

＜圧密問題＞　圧密の進行速度　　Ex)　90%圧密量にかかる時間

圧密量＝沈下量　　<u>最終沈下量</u>(=100%沈下量)

(degree of consolidation)　　ΔS_f

圧密度　$U(t)=\Delta S(t)/\Delta S_f$　　$t \Rightarrow T_v$

(1.24)
(1.25) ⇨

$$U(T_v) = 1 - \frac{\int_0^1 \Delta u(\zeta, T_v)d\zeta}{\Delta u_{t=0}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\Delta\sigma_{z0}}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Delta\sigma_{z0}}{a_n}\exp\left(-a_n^2 T_v\right)\sin(a_n\zeta)d\zeta$$

$$= 1 - \sum_0^{\infty}\frac{2}{a_n}\exp\left(-a_n^2 T_v\right)\underbrace{\int_0^1 \sin(a_n\zeta)d\zeta}_{1/a_n} \qquad a_n = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$= 1 - \sum_0^{\infty}\frac{2}{a_n^2}\exp\left(-a_n^2 T_v\right)$$

$$U(T_v) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left(-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 T_v\right) \quad (1.26)$$

T_vが小さいとき

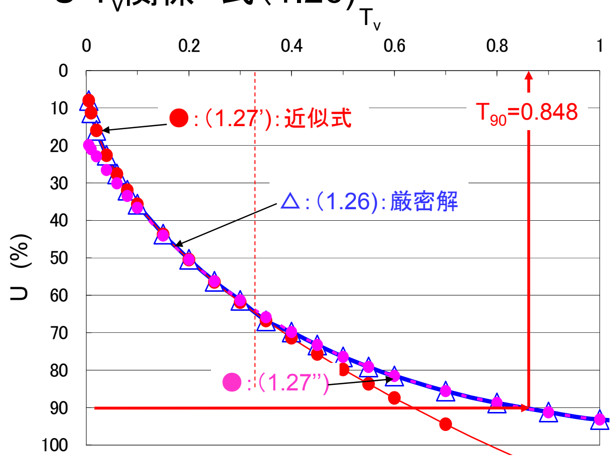
$$U(T_v) \approx 2\sqrt{\frac{T_v}{\pi}}, (T_v < 0.3) \quad (1.27')$$

T_vが大きいとき

$$U(T_v) \approx 1 - \frac{8}{\pi^2}\exp\left(\frac{\pi^2}{4}T_v\right) \quad (1.27'')$$

級数第一項

U-T_v関係　式(1.26)



これは、式(1.20)、式(1.21)の解

U~T_v関係は初期条件、境界条件に依存

<u>実際の圧密時間,沈下量</u>

Ex)　90%圧密時間(t_{90})
沈下量(ΔS_{90})

T_{90}(=T_v at U=90%)=0.848

最大排水長

(1.18)

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} \Rightarrow t_{90} = \frac{T_{90}H^2}{c_v}$$

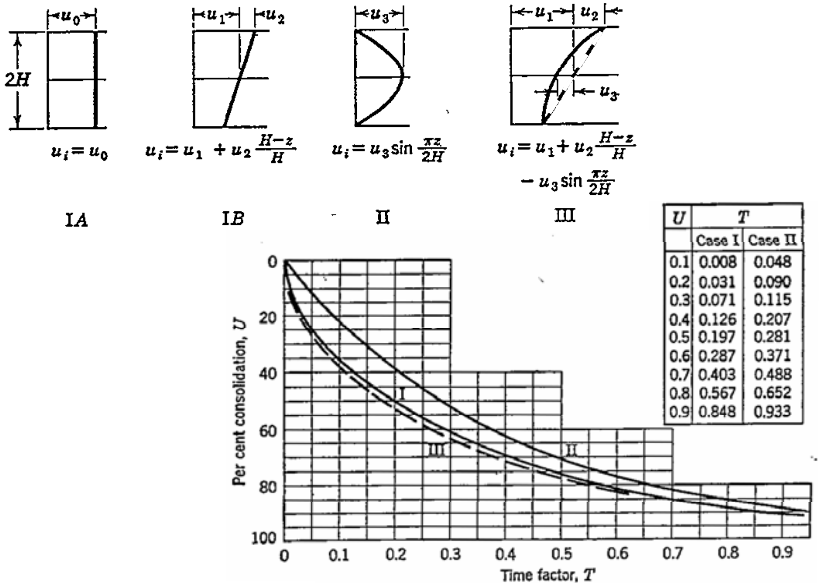
$$\Delta S_{90} = 0.9 m_v \cdot h \cdot \Delta\sigma_{z0}$$

粘土層厚

両端排水：$H=h/2$
片端排水：$H=h$

m_v、c_vの決定法：標準圧密試験
定ひずみ圧密試験

異なる初期条件のU-T_v関係（Taylor：1948)



U	T Case I	T Case II
0.1	0.008	0.048
0.2	0.031	0.090
0.3	0.071	0.115
0.4	0.126	0.207
0.5	0.197	0.281
0.6	0.287	0.371
0.7	0.403	0.488
0.8	0.567	0.652
0.9	0.848	0.933

本日のTechnical terms

変数分離法：method of separation of variables
等時線： isochrone
圧密度：degree of consolidation

課題(11/4_②)

常時、排水条件が成り立つ透水性が大きい砂礫層に挟まれた厚さ8mの粘土層がある。この上に盛土荷重（$\Delta\sigma_{z0}$=100kPa)が作用した。

(1) この粘土のm_v=0.0002m^2/kN、c_v=0.01m^2/dayとして90%圧密に要する時間（t_{90}）とその時の沈下量（ΔS_{90})を求めよ。

(2) 下端が非排水面の場合、t_{90}は両端排水の場合に比べて何倍になるか？